REALIZAÇÃO DE UMA REDE ALTIMÉTRICA A PARTIR DA COMBINAÇÃO DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES NORMAIS COM A CONDIÇÃO NNT

A. L. C. Souza[1,2], *C. H. C. Mendonça* [1,2], *J. F. G. Monico*[1,3]

[1] Universidade Estadual Paulista - UNESP, Brasil
[2] Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas, Presidente Prudente- SP, Brasil
[3] Departamento de Cartografia, Presidente Prudente- SP, Brasil

Comissão II - Geodésia, Astronomia, Topografia e Agrimensura

RESUMO

Admitindo a definição de um sistema de referência para uma rede de nivelamento, caso unidimensional e, portanto, o caso mais simples, este sistema apresenta deficiência de posto em termos de origem. Assim, não se teria como obter as altitudes da rede pois o sistema de equações normais é singular, apresentando deficiência de posto igual a um. Deste modo, informações adicionais devem ser introduzidas para que o problema seja solucionado. Essa deficiência pode ser solucionada mediante a introdução da condição NNT (*No Net Translation*), a qual garante que a rede seja livre de translação, ou seja, não ocorre alteração da média das altitudes aproximadas após o ajustamento. O presente trabalho visa contribuir com os fundamentos teóricos e práticos envolvidos na inserção da condição NNT na realização de uma rede de referência de nivelamento, uma vez que esta abordagem não é muito difundida. Além disso, serão apresentados aspectos concernentes a combinação de soluções de duas redes de nivelamento adjacentes a nível de equações normais, bem como sugestão para aplicação no caso de uma rede com várias estações de referências (marégrafos).

Palavras chave: Condição NNT; Equações Normais; Rede de Nivelamento

ABSTRACT

Assuming a definition of a reference system for a leveling network, a one-dimensional case, and therefore the simplest case, this system presents a deficiency of position in terms of origin. Thus, it is not possible to obtain as altitudes of the network, the system of normal equations is singular, presenting deficiency of rank equal to one. In this way, the information must be provided so that the problem is solved. This deficiency can be solved by means of an introduction of the condition NNT (No Network Translation), which ensures that the network is free of translation, that is, there is no change in the average of the approximate altitudes after the adjustment. The present research aims to contribute with theoretical and practical foundations involved in the insertion of the NNT condition in the realization of a network reference leveling, since this approach is not widespread. In addition, the following aspects have been described: a combination of solutions of two adjacent leveling networks at the level of normal equations, as well as suggestion for application in the case of a network with several reference stations (tide gauges).

Keywords: NNT condition; Normal equations; Leveling network

1 – INTRODUÇÃO

Nas realizações do ITRS (*International Terrestrial Reference System*) estão envolvidas diferentes técnicas de posicionamento espaciais, sendo estas: GNSS (*Global Navigation Satellite System*), VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), SLR (*Satellite Laser Ranging*) e DORIS (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*). As soluções fornecidas a partir de cada uma dessas técnicas envolvem vários anos de observações e são combinadas de forma a produzir uma única solução que pode ser considerada ótima.

Cada solução individual apresenta propriedades de interesse, bem como alguma deficiência, sendo necessário a adoção de injunções no modelo matemático para a realização do referencial global. Estas condições matemáticas são denominadas NNR (No Net Rotation) e NNT (No Net Translation), as quais garantem a conservação do momento angular (não rotação) e não translação da rede, respectivamente (MONICO, 2005).

Considerando a definição de um sistema de referência para uma rede de nivelamento, caso unidimensional e, portanto, o caso mais simples, este sistema apresenta deficiência de posto em termos de origem. Segundo Monico (2005), não seria possível a obtenção das altitudes da rede de nivelamento, uma vez que o sistema de equações normais é singular, apresentando deficiência de posto igual a um. Deste modo, faz-se necessário a inclusão de informações adicionais para que este problema seja solucionado. Uma possibilidade é introduzir a condição NNT por meio de injunção, o que garante a não alteração da média das altitudes aproximadas após o ajustamento.

Tendo em vista o discutido, o presente trabalho tem como objetivo contribuir com os fundamentos teóricos e práticos envolvidos na aplicação da condição NNT na realização de uma rede de nivelmaneto. Além disso, serão apresentados aspectos concernentes a combinação de soluções de duas redes de nivelamento adjacentes a nível de equações normais.

2 – <u>CONDIÇÃO NNT EM REDES DE NIVELMANTO</u>

Na concepção de uma rede de nivelamento estática unidimensional, apresenta deficiência de posto em termos de origem. Uma rede que cumpre a condição NNT significa que ela é livre de translação (MONICO, 2005). Para uma rede vinculada a uma rede de referência de ordem superior, que possui altitudes conhecidas de alta acurácia, a condição NNT é de certa forma trivial. Neste caso, a origem da rede de ordem superior é conhecida e suas altitudes são tomadas como fixas.

Entretando, quando não se tem uma rede de ordem superior, conforme Monico (2005), a condição NNT pode ser aplicada em relação a média das altitudes aproximadas, levando a segunte condição:

$$\Sigma_{i=1}^{m} \Delta\vec{x}_i = 0 \quad (1)$$

sendo m o número de estação da rede e $\Delta\vec{x}_i$ o vetor das correções aos parâmetros (altitudes) aproximadas. Ao fazer uso desta condição, fica garantido que a não ocorrência de alteração das médias das altitudes aproximadas após o ajustamento. A Figura 1 ilustra o caso de uma rede que cumpre a condição NNT, onde a resultante do movimento é nula, não apresentando translação. De acordo com Monico (2005), é importante resaltar que esta condição corresponde a injunções internas que comparecem no ajustamento livre.

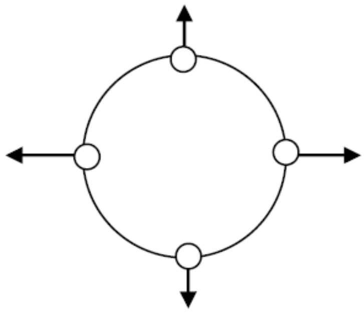

Figura 1 – Rede que cumpre a condição NNT
Fonte: Monico (2005)

Na combinação de soluções de duas redes de nivelamento, ou mais, a nível de equações normais, é fundamental preservar a equação normal de cada solução individual sem injunções (MONICO, 2005). Na obtenção deste tipo de solução é de suma importância que a condição NNT seja aplicada uma única vez na solução final. Tal procedimento é uma solução que pode ser aplicado na combinação de redes de nivelamentos de diferentes origens (marégrafos).

3 – <u>DESENVOLVIMENTO</u>

Para o desenvolvimento do presente trabalho considerou-se duas redes de nivelmamento independentes e adjacentes, havendo pontos comuns entre estas. No ajustamento das redes de nivelamento, considerou-se a não existência de uma rede de referência de ordem superior e que as altitudes aproximadas são de certa forma estabelecidas de forma arbitrária. Deste modo, para a realização da rede, uma possibilidade é a utilização da condição NNT.

Inicialmente, foram obtidas as soluções individuais de cada rede. Posteriormente, obteve-se a solução conjunta por meio da combinação dos resultados a nível de equações normais, estimando assim a solução final (altitudes) para a rede de nivelamento. A Figura 2 apresenta a distribuição dos pontos pertencentes a rede de nivelamento considerada.

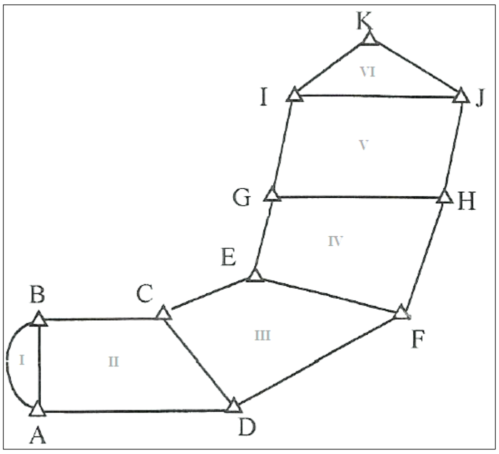

Figura 2 – Rede de nivelamento
Fonte: Adaptado de Gemael (1994)

A primeira rede de nivelamento considerada consiste nos circuitos I, II e III, conforme Figura 2. As observações refentes a esta encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Observações na primeira rede de nivelamento

Linha nivelada	Δh (m)	Comprimento (km)	H_0 (m)	
A-B	-106,2625	72	A	393,9237
B-A	106,2602	40	B	287,4992
B-C	175,9286	44	C	463,4648
C-D	4,0472	20	D	467,5542
D-A	-73,6905	61	E	427,1501
C-E	-36,3277	26	F	457,1081
E-F	29,9320	59		
F-D	10,4241	60		

Já a segunda rede de nivelamento considera os circuitos IV, V e VI, conforme Figura 2. As observações refentes a esta rede são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Observações na segunda rede de nivelamento

Linha nivelada	Δh (m)	Comprimento (km)	H_0 (m)	
E-F	29,9320	59	E	427,1501
E-G	-138,6869	83	F	457,1081
G-H	181,0665	26	G	288,3912
H-F	-12,4700	74	H	469,5101
G-I	162,2300	248	I	450,6622
I-J	23,8215	111	J	474,4666
J-H	-5,0135	67	K	473,5248
I-K	22,8896	108		
K-J	0,9243	147		

Para as soluções individuais, além das equações de observação em função dos desníveis, tornou-se necessário introduzir a injunção NNT referentes a origem. Desta forma, se acordo com Monico (2006), tem-se:

$$\begin{aligned} V &= AX + L \\ CX &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

sendo $V(n \times 1)$ o vetor dos resíduos das observações; $A(n \times u)$ a matriz Jacobiana; $X(u \times 1)$ o vetor das correções aos parâmetros aproximados (X_0); e $L(n \times 1)$ o vetor das observações subtraído do vetor das observações calculados em função dos parâmetros aproximados; n é o número de observações; e u o número de parâmetros.

A segunda equação de (2) refere-se as injunções necessários para que o sistema possa ser solucionado, sendo $C(1 \times u)$ um vetor o qual assume que todos os vértices fizeram parte da definição da origem, dado por:

$$C = [1 \quad \cdots \quad 1]$$

Por meio destas informações, o sistema de equações apresentados em (2) pode ser solucionado aplicando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), fazendo uso do Método Paramétrico conforme Gemael (1994). Considerou-se o peso de cada observação inversamente proporcional ao comprimento da linha de nivelamento, expresso na matriz $P(n \times n)$. As equações normais necessárias para solução são dadas por:

$$N = A^T P A \tag{3}$$
$$U = A^T P L \tag{4}$$

O vetor das correções dos parâmetros aproximados é dado por:

$$X = -(N + C^T C)^{-1} U \tag{5}$$

Assim, o vetor dos parâmetros ajustados de cada solução individual é obtido fazendo:

$$X^a = X^0 + X \tag{6}$$

4 – RESULTADOS E ANÁLISES

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos no ajustamento nas redes de nivelamento.

4.1 – Solução individual da primeira rede

Para a realização do ajustamento da primeira rede de nivelamente tem-se as seguintes as seguintes equações dee observação:

$$\begin{cases} \Delta H^a_{A-B} = H^a_B - H^a_A \\ \Delta H^a_{B-A} = H^a_A - H^a_B \\ \Delta H^a_{B-C} = H^a_C - H^a_B \\ \Delta H^a_{C-D} = H^a_D - H^a_C \\ \Delta H^a_{D-A} = H^a_A - H^a_D \\ \Delta H^a_{C-E} = H^a_E - H^a_C \\ \Delta H^a_{E-F} = H^a_F - H^a_E \\ \Delta H^a_{F-D} = H^a_D - H^a_F \end{cases}$$

Por meio do modelo matemático acima, chegou-se a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Diante do resultado, determinou-se as matrizes normais N e U, dadas por meio das Equações (3) e (4), respectivamente. A matriz N é singular, apresentando deficiência de posto igual a um. Para se obter a solução, fez-se uso da condição NNT, por meio da Equação (5), obtendo assim o vetor de correção dos parâmetros aproximados, dado por:

$$X = \begin{bmatrix} -0,0528 \\ 0,0851 \\ 0,0043 \\ -0,0522 \\ 0,0290 \\ -0,0134 \end{bmatrix}_m$$

Como pode ser verificado, o somatório das correções no vetor X é nula, implicando que a rede cumpre a condição NNT. Ademais, determinou-se a precisão das altitudes por meio da Matriz Variância-Covariância (MVC). Assim, as altitudes ajustadas para a primeira rede de nivelamento, bem como suas respectivas precisões, é dado por:

$$\begin{cases} H_A = 393{,}8709 \pm 0{,}0317\, m \\ H_B = 287{,}5843 \pm 0{,}0299\, m \\ H_C = 463{,}4691 \pm 0{,}0201\, m \\ H_D = 467{,}5020 \pm 0{,}02233\, m \\ H_E = 427{,}1792 \pm 0{,}0290\, m \\ H_F = 457{,}0947 \pm 0{,}0356\, m \end{cases}$$

4.2 – Solução individual da segunda rede

Para a realização do ajustamento da segunda rede de nivelamente tem-se as seguintes as seguintes equações dee observação:

$$\begin{cases} \Delta H_{E-F}^{a} = H_F^a - H_E^a \\ \Delta H_{E-G}^{a} = H_G^a - H_E^a \\ \Delta H_{G-H}^{a} = H_H^a - H_G^a \\ \Delta H_{H-F}^{a} = H_F^a - H_H^a \\ \Delta H_{G-I}^{a} = H_I^a - H_G^a \\ \Delta H_{I-J}^{a} = H_J^a - H_I^a \\ \Delta H_{J-H}^{a} = H_H^a - H_J^a \\ \Delta H_{I-K}^{a} = H_K^a - H_I^a \\ \Delta H_{K-J}^{a} = H_J^a - H_K^a \end{cases}$$

Por meio do modelo matemático acima, chegou-se matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Diante do resultado, determinou-se as matrizes normais N e U, dadas por meio das Equações (3) e (4), respectivamente. Novamente, a matriz N é singular, apresentando deficiência de posto. Para se obter a solução, fez-se uso da condição NNT, por meio da Equação (5), obtendo assim o vetor de correção dos parâmetros aproximados, dado por:

$$X = \begin{bmatrix} 0,0899 \\ 0,0582 \\ 0,0279 \\ -0,0169 \\ -0,0606 \\ -0,0608 \\ -0,0377 \end{bmatrix}_m$$

Como pode ser verificado, o somatório das correções no vetor X é nulo, implicando que a rede cumpre a condição NNT. Ademais, determinou-se a precisão das altitudes por meio da Matriz Variância-Covariância (MVC). Assim, as altitudes ajustadas para a segunda rede de nivelamento, bem como suas respectivas precisões, é dado por:

$$\begin{cases} H_E = 427{,}2400 \pm 0{,}0170\, m \\ H_F = 457{,}1663 \pm 0{,}0164\, m \\ H_G = 288{,}4191 \pm 0{,}0122\, m \\ H_H = 469{,}4932 \pm 0{,}0110\, m \\ H_I = 450{,}6016 \pm 0{,}0176\, m \\ H_J = 474{,}4058 \pm 0{,}0140\, m \\ H_K = 473{,}4871 \pm 0{,}0212\, m \end{cases}$$

4.3 – Solução combinada

Visando a estimativa da altitude das estações da rede altimétrica como um todo, foi realizado a combinação das soluções individuais obtidas nas seções 4.1 e 4.2 a nível equações normais.

A combinação de equações normais se deu pela soma das equações normais de cada solução individual fornecida. Embora pareça ser trivial, esta combinação demandou uma análise minuciosa dos elementos de cada matriz N e U fornecidas pelas soluções individuais, de forma que cada elemento das matrizes normais da solução final fossem obtidos pela soma dos elementos correspondentes das soluções individuais em cada ponto.

$$U_f = \begin{bmatrix} 5{,}3739 \times 10^{-3} \\ -7{,}1984 \times 10^{-3} \\ -3{,}8322 \times 10^{-5} \\ 3{,}4603 \times 10^{-3} \\ -2{,}9555 \times 10^{-3} \\ -4{,}0423 \times 10^{-4} \\ -1{,}3337 \times 10^{-3} \\ 2{,}0836 \times 10^{-3} \\ 5{,}6575 \times 10^{-4} \\ 8{,}1574 \times 10^{-4} \\ -3{,}6905 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$N_f = \begin{bmatrix} 0{,}0553 & -0{,}0389 & 0{,}0000 & -0{,}0164 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ -0{,}0389 & 0{,}0616 & -0{,}0227 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & -0{,}0227 & 0{,}1112 & -0{,}0500 & -0{,}0385 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ -0{,}0164 & 0{,}0000 & -0{,}0500 & 0{,}0831 & 0{,}0000 & -0{,}0167 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0385 & 0{,}0000 & 0{,}0844 & -0{,}0339 & -0{,}0121 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0167 & -0{,}0339 & 0{,}0641 & 0{,}0000 & -0{,}0135 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0121 & 0{,}0000 & 0{,}0545 & -0{,}0384 & -0{,}0040 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0135 & -0{,}0385 & 0{,}0669 & 0{,}0000 & -0{,}0149 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0040 & 0{,}0000 & 0{,}0223 & -0{,}0090 & -0{,}0093 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0149 & -0{,}0090 & 0{,}0307 & -0{,}0068 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0093 & -0{,}0068 & 0{,}0161 \end{bmatrix}$$

Novamente, diante do resultado, nota-se que a matriz N_f é singular, apresentando deficiência de posto. Para se obter a solução, fez-se uso da condição NNT, por meio da Equação (5), obtendo assim o vetor de correção dos parâmetros aproximados, dado por:

$$X_f = \begin{bmatrix} -0{,}0096 \\ 0{,}1281 \\ 0{,}0471 \\ -0{,}0086 \\ 0{,}0706 \\ 0{,}0330 \\ 0{,}0059 \\ -0{,}0397 \\ -0{,}0831 \\ -0{,}0835 \\ -0{,}0603 \end{bmatrix}_m$$

Como pode ser verificado, o somatório do vetor das correções no vetor X é nulo, implicando que a rede cumpre a condição NNT. Ademais, determinou-se a precisão das altitudes por meio da Matriz Variância-Covariância (MVC). Assim, as altitudes ajustadas para a solução conjunta das duas redes de nivelamento, bem como suas respectivas precisões, é dado por:

$$\begin{cases} H_A = 393{,}9141 \pm 0{,}0330\,m \\ H_B = 287{,}6273 \pm 0{,}0319\,m \\ H_C = 463{,}5119 \pm 0{,}0241\,m \\ H_D = 467{,}5456 \pm 0{,}0257\,m \\ H_E = 427{,}2207 \pm 0{,}0224\,m \\ H_F = 457{,}1411 \pm 0{,}0233\,m \\ H_G = 288{,}3971 \pm 0{,}0256\,m \\ H_H = 469{,}4704 \pm 0{,}0241\,m \\ H_I = 450{,}5791 \pm 0{,}0425\,m \\ H_J = 474{,}3831 \pm 0{,}0350\,m \\ H_K = 473{,}4645 \pm 0{,}0492\,m \end{cases}$$

Analisando os resultados obtidos, observa-se que pontos comuns em ambas as redes de nivelamento (H_E^a e H_F^a) são mais precisos que os demais devido a redundância de observações. Quando analisadas as soluções individuais, observa-se que estas apresentam precisões diferentes, porém, quando combinadas a solução obtida pode ser considerada ótima em comparação com as soluções individuais.

5 – CONCLUSÃO

Com o desenvolvimento do trabalho foi possível executar a realização de uma rede de nivelamento fazendo uso da condição NNT, uma vez que a mesma apresentava deficiência em termos de origem, visto que assumiu-se a não existência de uma rede de nivelamento de ordem superior.

No que se refere a combinação das soluções individuais a nível de equações normais, tem-se que a solução combinada pode ser considerada superior quando comparada as soluções individuais em termos de precisão. Além disto, nota-se que as precisões nos pontos de ligação são melhoradas devido a redundância de observações. Ademais, a qualidade das soluções obtidas estão diretamente relacionadas aos valores dos parâmetros aproximados, neste sentido, obseva-se que, quanto melhor os parâmetos aproximados, mais precisa será a solução final.

Por fim, é importante ressaltar que a condição NNT deve ser inserida somente uma vez na solução final, preservando as equações normais de cada solução individual. Caso isso não ocorrá, a solução final apresentará distorções na rede, divergindo da teoria apresentada no trabalho. Uma possibilidade importante desta condição seria no ajustamento global de uma rede de nivelamento, com vários marégrafos disponíveis. A condição NNT nesta caso poderia ser aplicada apenas em estações relacionadas com os marégrafos, garantindo a comfiabilidade da rede.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq e a FAPESP (Processo 2016/26000-5) pelo fomento à pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GEMAEL, C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodsésicas. Curitiba: UFPR, 1994.

MONICO, J. F. G. As condições NNT e NNR na realização de um Referencial. Boletim de Ciências Geodésicas, Curitiba, v. 11, n. 1, p. 45-52, jun 2005.

MONICO, J. F. G. Fundamentos matemáticos envolvidos na realização do ITRF. Boletim de Ciências Geodésicas, Curitiba, v. 12, n. 2, p. 377-351–52, dez 2006.